

LINEÁRIS ALGEBRA, TÉRGÖRBÉK, VEKTORANALÍZIS

Belucz Bernadett

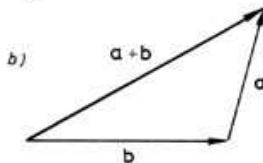
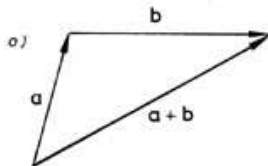
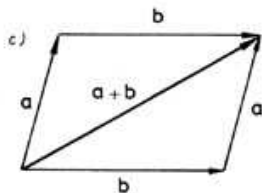
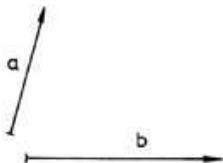
Csillagászati Tanszék, Eötvös Lóránd Tudományegyetem
Magyar Napfizikai Alapítvány, Gyula



Vektoralgebra

VEKTOROK ÉRTELMEZÉSE

- ▶ térbeli vektorokkal foglalkozunk, ezek halmaza a geometriai vektortér
- ▶ Vektoron irányított szakaszt értünk.
- ▶ egy vektort akkor ismerünk, ha ismerjük a hosszát és az irányát
- ▶ az irány a térben két számadattal jellemezhető + szakasz hossza
- ▶ a vektorok megadhatóak a koordinátaikkal is, ez szintén három számadat
- ▶ jelölésük: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$; $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$, $\underline{\underline{c}}$

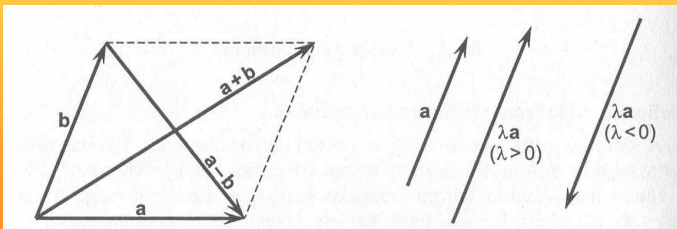


VEKTOROK ÉRTELMEZÉSE

- ▶ ha a vektor kezdőpontja a térnek egy meghatározott pontja, akkor kötött vektorról, ellenkező esetben szabad vektorról beszélhetünk
- ▶ ha a kezdőpont az origó, akkor gyakran helyvektorról beszélünk
- ▶ a továbbiakban általában szabad vektorokkal foglalkozunk
- ▶ az irányított szakasz hosszát a vektor abszolút értékének nevezzük, jelölése $|a|$
- ▶ ha $|a|=1$, akkor az a vektort egységvektornak nevezzük, jelölése e
- ▶ ha $|a|=0$, akkor a zérusvektor (nullavektor), melynek jele 0
- ▶ a két vektor egyenlő, ha párhuzamos eltolással egymásba átvihetők (fedésbe hozhatók), azaz eltolás után kezdő és végpontjuk egybeesik.

MŰVELETEK VEKTORRAL – ÖSSZEADÁS, KIVONÁS

- ▶ Az **a** és **b** vektorok összegét, ill. különbségét a következőképpen értelmezzük (paralelogramma szabály).



- ▶ Az összeadás **kommutatív** és **asszociatív**, azaz

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

MŰVELETEK VEKTORRAL – VEKTOROK SZORZÁSA SZÁMMAL

- ▶ Az $\mathbf{a}$ vektornak a λ számmal, skalárral való szorzata az a $\lambda\mathbf{a}$ vektor, melynek abszolút értéke $|\lambda||\mathbf{a}|$, iránya pedig $\mathbf{a}$ irányával megegyező ha λ pozitív, és ellentétes, ha λ negatív.
- ▶ Ha $\lambda = \frac{1}{|\mathbf{a}|}$, akkor $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}| = \frac{1}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}| = 1$, vagyis $\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$ vektor egységvektor, tehát egy vektor egységvektorát megkapjuk, ha a vektort osztjuk az abszolútértékével.

MŰVELETEK VEKTORRAL – SKALÁRIS SZORZÁS

- ▶ Két vektor skaláris szorzatán a két vektor abszolút értékének és az általuk bezárt szög koszinuszának a szorzatát értjük.
- ▶ Az **a** és **b** vektorok skaláris szorzatának jelölése **ab**. A definíció értelmében

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \phi.$$

- ▶ A $\cos \psi$ is számolható, ha ismert az **ab** skaláris szorzat értéke:

$$\cos \psi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

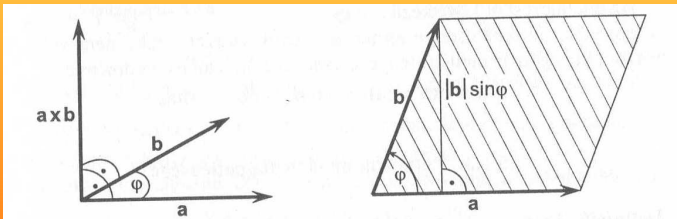
- ▶ A skaláris szorzás eredménye mindig egy szám.
- ▶ Ha két vektor merőleges egymásra, akkor skaláris szorzatuk nulla, és ha két vektor skaláris szorzata nulla, akkor a két vektor merőleges egymásra.
- ▶ A skaláris szorzás kommutatív és az összeadásra nézve disztibutív:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$$

MŰVELETEK VEKTORRAL – VEKTORIÁLIS SZORZÁS

- ▶ Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzatán azt az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektort értjük, amely merőleges mindkét vektorra, hossza $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \psi$, továbbá $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jobbsogrású rendszert alkotnak.



- ▶ A vektoriális szorzat eredménye mindig vektor, továbbá a hossza $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \psi$ geometriailag a vektorok által kifeszített paralelogramma területével egyenlő.

MŰVELETEK VEKTORRAL – VEKTORIÁLIS SZORZÁS

- ▶ Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamosak, akkor a két vektor vektoriális szorzata $\mathbf{0}$ vektor.
- ▶ A vektoriális szorzat nemkommutatív, ugyanis

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

- ▶ Az

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

- ▶ Az $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ szorzatot kétszeres vektoriális szorzatnak nevezzük, a kifejtési tétellel bontható fel

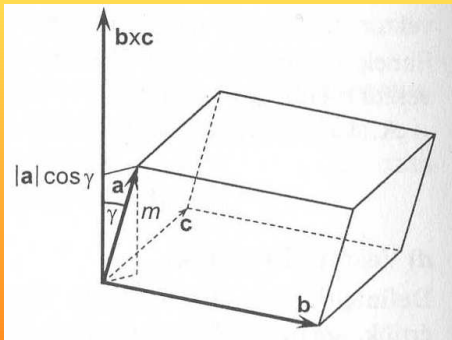
MŰVELETEK VEKTORRAL – VEGYES SZORZAT

- ▶ Két vektor vektoriális szorzatának egy harmadik vektorral képzett skaláris szorzatát vegyes szorzatnak nevezzük.
- ▶ Az **a,b,c** vektorok ilyen sorrendben vett vegyes szorzata:

$$\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$$

- ▶ Az **abc** vegyes szorzat abszolút értéke a három vektor által alkotott paralelepipedon térfogatával egyenlő.
- ▶ Ha a vegyes szorzat értéke nulla, akkor a három vektor egy síkban van (komplanáris).

MŰVELETEK VEKTORRAL – VEGYES SZORZAT



- A tényezők ciklikus cseréje esetén a vegyes szorzat értéke nem változik, viszont két egymás melletti tényező cseréje előjelváltást eredményez:

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{bac}$$

VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE

- ▶ Az $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ vektorok lineárisan függetlenek, ha az

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k = 0$$

egyenlőség csak $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ esetben áll fenn.

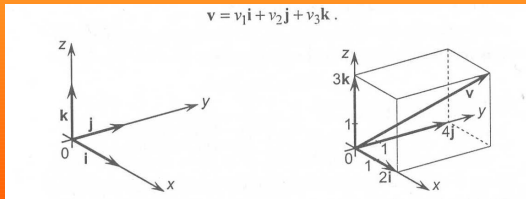
Ellenkező esetben a vektorok lineárisan összefüggők.

- ▶ az $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k$ vektor az $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ vektorok lineáris kombinációja ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ valós számok)
- ▶ a vektorok lineáris függetlensége azt jelenti, hogy egyik vektor sem állítható elő a többi vektor lineáris kombinációjaként
- ▶ Kétdimenziós térben (síkban) maximum kettő, a háromdimenziós térben maximum három lineárisan független vektor adható meg.
- ▶ Ha az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok egy síkban vannak, vagyis a vegyes szorzatuk nulla, akkor azok lineárisan összefüggők.

VEKTOROK MEGADÁSA KOORDINÁTÁKKAL – A VEKTOR KOORDINÁTÁI

- ▶ Vegyünk fel a térben egy O pontot és e pontból kiinduló, páronként egymásra merőleges egységvektort, jelölje ezeket $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ úgy, hogy ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkossanak, akárcsak a térbeli derékszögű koordinátarendszer tengelyei.
- ▶ Nevezzük ezeket a vektorokat **bázisvektoroknak**.
- ▶ Ha a $\mathbf{v}$ vektor az O pontból a $P(v_1, v_2, v_3)$ pontba mutat, akkor előállítható a $v_1\mathbf{i}$, $v_2\mathbf{j}$, $v_3\mathbf{k}$ vektorok összegeként, azaz ekkor

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$



VEKTOROK MEGADÁSA KOORDINÁTÁKKAL – A VEKTOR KOORDINÁTÁI

- ▶ A v_1, v_2, v_3 számokat a vektor $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.
- ▶ A vektort megadhatjuk a következő képpen:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = (v_1, v_2, v_3)$$

- ▶ A vektor koordinátákkal való megadása azt jelenti, hogy rendezett számhármasként is értelmezhető. Ez lehetővé teszi a vektor bizonyos irányú általánosítását.
- ▶ Vektoron rendezett számhármast értünk.

VEKTOROK MEGADÁSA KOORDINÁTÁKKAL – A VEKTOR KOORDINÁTÁI

- ▶ A két vektor definíció ekvivalens egymással.
- ▶ Bázisvektornak nemcsak $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vektorhármass választható, hanem három olyan tetszőleges $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ vektorhármass is, amelyek nincsenek egy síkban.
- ▶ Ekkor a tér tetszőleges $\mathbf{v}$ vektora felírható

$$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{b}_1 + \mu \mathbf{b}_2 + \nu \mathbf{b}_3$$

alakban. A λ, μ, ν számok a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ bázisra vonatkozó koordinátái.

VEKTOROK MEGADÁSA KOORDINÁTÁKKAL – MŰVELETEK KOORDINÁTÁS ALAKBAN

- ▶ Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$
- ▶ Az $\mathbf{a}$ vektor abszolút értéke:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

- ▶ Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok akkor és csakis akkor egyenlők, ha $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$
- ▶ Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok összege és különbsége:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

VEKTOROK MEGADÁSA KOORDINÁTÁKKAL – MŰVELETEK KOORDINÁTÁS ALAKBAN

- ▶ Az $\mathbf{a}$ vektornak a λ számmal való szorzata:

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

- ▶ Az $\mathbf{a}$ vektor egységvektora:

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \left(\frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_3}{|\mathbf{a}|} \right)$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

VEKTOROK MEGADÁSA KOORDINÁTÁKKAL – MŰVELETEK KOORDINÁTÁS ALAKBAN

- ▶ Ha az **a** vektor a koordinátatengelyekkel rendre α , β , γ szögeket zár küzre, akkor

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|} \quad \cos \beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|} \quad \cos \gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}$$

- ▶ Innen látható, hogy ezeknek az iránykoszinuszoknak a négyzetösszege:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

- ▶ Az **a** és **b** vektorok skaláris szorzata:

$$\mathbf{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

VEKTOROK MEGADÁSA KOORDINÁTÁKKAL – MŰVELETEK KOORDINÁTÁS ALAKBAN

- ▶ Az **a** és **b** vektorok vektoriális szorzata:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

- ▶ Az **a**, **b** és **c** vektorok vegyes szorzata:

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

PÉLDÁK

Írjuk fel a $\mathbf{v} = (-2, \sqrt{3}, 3)$ vektor egységvektorát! Mekkora szöget zár be az x-tengellyel?

PÉLDÁK

Írjuk fel a $\mathbf{v} = (-2, \sqrt{3}, 3)$ vektor egységvektorát! Mekkora szöget zár be az x-tengellyel?

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{4 + 3 + 9} = \sqrt{16} = 4$$

$$\mathbf{e}_v = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{4}(-2, \sqrt{3}, 3) = \left(-\frac{2}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

Az x-tengellyel bezárt szögének a koszinusza:

$$\cos \alpha = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

, ahonnan

$$\alpha = 150^\circ$$

PÉLDÁK

Legyen $\mathbf{a}=(5,-8,3)$ és $\mathbf{b}=(10,4,2)$. Az $\mathbf{ab}=?$

PÉLDÁK

Legyen $\mathbf{a}=(5,-8,3)$ és $\mathbf{b}=(10,4,2)$. Az $\mathbf{ab}=?$

$$\mathbf{ab} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 50 - 32 + 6 = 24$$

PÉLDÁK

Merőlegesek egymásra az $\mathbf{u}=(5,-2,7)$ és a $\mathbf{v}=(4,10,0)$ vektorok?

PÉLDÁK

Merőlegesek egymásra az $\mathbf{u}=(5,-2,7)$ és a $\mathbf{v}=(4,10,0)$ vektorok?

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = 5 \cdot 4 - 2 \cdot 10 + 0 \cdot 7 = 0$$

IGEN

PÉLDÁK

Mekkora az $\mathbf{a}=(2,-1,3)$ és $\mathbf{b}=(1,0,7)$ vektorok vektoriális szorzata, és mekkora a két vektor által kifeszített paralelepipedon területe?

PÉLDÁK

Mekkora az $\mathbf{a}=(2,-1,3)$ és $\mathbf{b}=(1,0,7)$ vektorok vektoriális szorzata, és mekkora a két vektor által kifeszített paralelepipedon területe?

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2)\mathbf{i} - (a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1)\mathbf{j} + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)\mathbf{k} = \\ &= (-1 \cdot 7 - 3 \cdot 0)\mathbf{i} - (2 \cdot 7 - 3 \cdot 1)\mathbf{j} + (2 \cdot 0 - (-1) \cdot 1)\mathbf{k} = \\ &= -7\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + \mathbf{k} = (-7, -11, 1) \end{aligned}$$

$$T = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(-7)^2 + (-11)^2 + 1^2} = \sqrt{171}$$

PÉLDÁK

Az $\mathbf{a}=(-1,3,2)$, $\mathbf{b}=(4,-6,2)$ és $\mathbf{c}=(-3,12,11)$ vektorok vegyes szorzata?

PÉLDÁK

Az $\mathbf{a}=(-1,3,2)$, $\mathbf{b}=(4,-6,2)$ és $\mathbf{c}=(-3,12,11)$ vektorok vegyes szorzata?

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -6 & 2 \\ -3 & 12 & 11 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= (-6 \cdot 11 - 2 \cdot 12)(-1) - 3(4 \cdot 11 - 2 \cdot (-3)) + 2(4 \cdot 12 - (-3) \cdot (-6)) = \\ &= 90 - 150 + 60 = 0 \end{aligned}$$

A három vektor egy síkban van és lineárisan összefüggnek.

RECIPROK VEKTORHÁRMAS

- ▶ Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ nem egy síkba eső vektorok, azaz $\mathbf{abc} \neq 0$
- ▶ Ekkor ehhez az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorhármashoz hozzárendelhető egy $\mathbf{r}_a$, $\mathbf{r}_b$, $\mathbf{r}_c$ **reciprok vektorhárm**as a következőképpen:

$$\mathbf{r}_a = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{abc}} \quad \mathbf{r}_b = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{abc}} \quad \mathbf{r}_c = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{abc}}$$

- ▶ Az $\mathbf{r}_a$, $\mathbf{r}_b$, $\mathbf{r}_c$ vektorhárm

as reciprok vektorhárm

asa az eredeti $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorhárm

- ▶ Az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vektorhárm

as reciprok vektorhárm

asa önmaga.

RECIPROK VEKTORHÁRMAS

- ▶ Tekintsük most a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ nem egy síkba eső vektorhármast; jelölje $\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3$ ennek reciprok vektorhármását.
- ▶ Tetszőleges $\mathbf{x}$ vektor nyilván kifejezhető a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ bázisvektorok segítségével:

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{g}_1 + x^2 \mathbf{g}_2 + x^3 \mathbf{g}_3$$

- ▶ Az x^1, x^2, x^3 számokat az $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ bázisvektorokra vonatkozó kontravariáns koordinátáinak nevezzük.
- ▶ Fejezzük most ki az $\mathbf{x}$ vektort $\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3$ reciprok vektorok – mint bázis vektorok – segítségével:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{g}^1 + x_2 \mathbf{g}^2 + x_3 \mathbf{g}^3$$

RECIPROK VEKTORHÁRMAS

- ▶ Az x_1, x_2, x_3 számokat az x vektor g_1, g_2, g_3 bázisra vonatkozó kovariáns koordinátáinak nevezzük. Ezek a g^1, g^2, g^3 bázisra vonatkozóan nyilván kontravariáns koordináták.
- ▶ Egy vektor koordinátáin – ha mást nem mondunk – a kontravariáns koordinátákat értjük.
- ▶ Ha bázisvektorként az i, j, k egységvektorokat választjuk, akkor a kovariáns és kontravariáns koordináták azonosak.
- ▶ Ezek a jól ismert derékszögű koordináták.

AZ N-DIMENZIÓS VEKTOR – AZ N-DIMENZIÓS VEKTOR FOGALMA

- ▶ A háromdimenziós vektor fogalmát általánosítjuk.
- ▶ n -dimenziós vektoron rendezett szám- n -est értünk
- ▶ A vektort alkotó számok a vektor koordinátái.
- ▶ Az n -dimenziós vektort szokás n elemű vektornak is mondani.
- ▶ Ha a számokat egymás mellé írjuk, akkor **sorvektorról**, ha egymás alá írjuk, akkor **oszlopvektorról** van szó.

AZ N-DIMENZIÓS VEKTOR – AZ N-DIMENZIÓS VEKTOR FOGALMA

- ▶ Azt a vektort, amelynek minden koordinátája nulla, **nullvektornak** nevezzük. Jele $\mathbf{0}$, tehát $\mathbf{0}=(0,0,0,...,0)$
- ▶ Az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ alakú vektorokat **egységvektoroknak** nevezzük.
- ▶ A $\mathbf{v}$ vektor abszolút értéke:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

- ▶ Két vektor **egyenlő**, ha a megfelelő koordinátáik egyenlőek.

PÉLDA

A $\mathbf{v}=(5,-1,3,0,1)$ vektor abszolút értéke?

PÉLDA

A $\mathbf{v}=(5,-1,3,0,1)$ vektor abszolút értéke?

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 3^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{36} = 6$$

MŰVELETEK N-DIMENZIÓS VEKTOROKKAL – SZORZÁS SKALÁRRAL

- ▶ Ha λ tetszőleges valós szám, akkor

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$$

- ▶ A skalárral való szorzás tulajdonságai:

$$M_1 \quad \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$$

$$M_2 \quad (\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}$$

$$M_3 \quad (\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$$

$$M_4 \quad 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

MŰVELETEK N-DIMENZIÓS VEKTOROKKAL – ÖSSZEADÁS, KIVONÁS

- ▶ Az **a** és **b** vektorok összege, ill. különbsége:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1, a_2, \dots, a_n) - (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$$

- ▶ Az összeadás tulajdonságai:

$$A_1 \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$A_2 \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

$$A_3 \quad \text{Tetszőleges } \mathbf{a} \text{ és } \mathbf{b} \text{ esetén van olyan } \mathbf{c}, \text{ hogy } \mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b}$$

- ▶ Az $M_1, M_2, M_3, M_4, A_1, A_2, A_3$ tulajdonságokkal rendelkező szám n -esek összességét **vektortérnek** nevezzük.

MŰVELETEK N-DIMENZIÓS VEKTOROKKAL – SKALÁRIS SZORZÁS

- ▶ Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$
- ▶ Ekkor

$$\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

- ▶ A skaláris szorzás tulajdonságai:

$$S_1 \quad \mathbf{ab} = \mathbf{ba}$$

$$S_2 \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$$

$$S_3 \quad (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{ab})$$

$$S_4 \quad \mathbf{aa} \geq 0. \text{ Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha } \mathbf{a}=\mathbf{0}.$$

- ▶ Az $M_1, M_2, M_3, M_4, A_1, A_2, A_3, S_1, S_2, S_3, S_4$ tulajdonságokkal rendelkező vektorteret **euklideszi térnek** nevezzük.
- ▶ Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ és $(1, 1, \dots, 1)$ azaonos méretű vektorok skaláris szorzata $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$. Az eredmény az $\mathbf{a}$ vektor koordinátáinak az összege. E miatt az $(1, 1, \dots, 1)$ vektort összegző vektornak nevezzük. Jelölése: $\mathbf{1}$.

PÉLDÁK

Az $\mathbf{a}=(5,-2,0,-7)$ és $\mathbf{b}=(-3,4,1,-2)$ vektorok skaláris szorzata?

PÉLDÁK

Az $\mathbf{a}=(5,-2,0,-7)$ és $\mathbf{b}=(-3,4,1,-2)$ vektorok skaláris szorzata?

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = -15 - 8 + 0 + 14 = -9$$

Lineáris algebra elemei

LINEÁRIS TÉR, ALTÉR

- ▶ Legyenek **a**, **b**, **c** az **X** halmaz elemei
- ▶ Az **X** halmazt lineáris térnek nevezzük, ha értelmezve van benne az összeadás és a számmal való szorzás, továbbá
 1. az összeadás
 - kommutatív, azaz $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
 - asszociatív, azaz $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
 - létezik nullelem (**0**), azaz $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ minden **a**-ra
 - minden **a**-hoz létezik a **-a** inverz elem, azaz $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
 2. számmal való szorzás
 - $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$
 - $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$
 - $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$
 - $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$

LINEÁRIS TÉR, ALTÉR

- ▶ Az X lineáris tér $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$ elemeit vektoroknak, az X teret pedig lineáris vektortérnek nevezzük.
- ▶ Ha az $\alpha, \beta, \dots$ számok valós számok, akkor X neve **valós lineáris tér**, ha pedig komplex számok, akkor X **komplex lineáris tér**.
- ▶ ! A lineáris teret – függetlenül attól, hogy milyen elemek alkotják – vektortérnek is nevezzük.
- ▶ ! A lineáris tér elemei nem feltétlenül olyan vektorok, mint amilyenekkel eddig foglalkoztunk. A lényeg csak az, hogy az X halmaz elemeire az összeadás és a számmal való szorzás fenti tulajdonságai teljesülnek.

LINEÁRIS TÉR, ALTÉR

- ▶ Az X lineáris altér nemüres M részhalmazát **lineáris altérnek**, röviden altérnek nevezzük, ha M maga is lineáris tér az X -ben értelmezett összeadással és számmal való szorzással.
- ▶ Az X halmaznak nemvalódi részhalmaza az üres halmaz és maga az X . Ezek nemvalódi alterek.

A LINEÁRIS TÉR BÁZISA, DIMENZIÓJA – VEKTORRENDSZER

- ▶ Tekinsük az n -dimenziós vektorokból álló $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorrendszerre.
- ▶ A lineáris tér $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorai **lineárisan függetlenek**, ha az

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

egyenlőség csak $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ esetben áll fenn. Ha viszont az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ számok között van nullától különböző és a fenti egyenlőség fennáll, akkor az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorok **lineárisan összefüggők**.

- ▶ Vektorrendszer rangján a rendszerből kiválasztható lineárisan független vektorok maximális számát értjük.

A LINEÁRIS TÉR BÁZISA, DIMENZIÓJA – VEKTORRENDSZER

1. Ha az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorok között van nullvektor, vagy kettő közülük egyenlő, akkor a vektorrendszer lineárisan összefüggő.
2. Lineárisan összefüggő vektorokhoz egy további vektort hozzávéve, az új rendszer lineárisan összefüggő marad.
3. Lineárisan független vektorok közül tetszőleges vektort elhagyva, a rendszer lineárisan független marad.
4. Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan összefüggők, ha van közöttük olyan vektor, amely a többi vektor lineáris kombinációjaként előállítható.

PÉLDÁK

Az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$
összefüggnek-e?

PÉLDÁK

Az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$ összefüggnek-e?

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3 = (\alpha_1, 0, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0, 0) + (0, 0, \alpha_3, 0) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0)$$

Ez csak akkor lesz nulla, ha $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

PÉLDÁK

A $\mathbf{a} = (2, -1, 5)$, $\mathbf{b} = (0, 3, -1)$, $\mathbf{c} = (6, 0, 14)$ vektorok lineárisan függetlenek?

PÉLDÁK

A $\mathbf{a} = (2, -1, 5)$, $\mathbf{b} = (0, 3, -1)$, $\mathbf{c} = (6, 0, 14)$ vektorok lineárisan függetlenek?

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

$$\alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_1$$

$$\alpha \mathbf{a}_2 + \beta \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_2$$

$$\alpha \mathbf{a}_3 + \beta \mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_3$$

$$\alpha 2 + \beta 0 = 6 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$\alpha(-1) + \beta 3 = 0 \Rightarrow \beta = 1$$

$$\alpha 5 + \beta(-1) = 14 \Rightarrow \text{IGAZ}$$

Az $\mathbf{c}$ vektor felírható a másik kettő lineáris kombinációjaként, vagyis összefüggők a vektorok.

A LINEÁRIS TÉR BÁZISA, DIMENZIÓJA

- ▶ A $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ vektorok a lineáris tér bázisrendszerét (bázisát) alkotják, ha lineárisan függetlenek és a lineáris tér minden vektora előállítható e vektorok lineáris kombinációjaként. A $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ vektorokat bázisvektoroknak nevezzük.
- ▶ Szokás azt mondani, hogy a bázisvektorok előállítják (kifeszítik, generálják) a lineáris teret.
- ▶ Egy lineáris térnek általában végtelen sok bázisa van. A bázisvektorok száma azonban mindegyik bázisban egyenlő.
- ▶ Ha egy lineáris térnek van véges sok vektorból álló bázisa, akkor a lineáris teret véges dimenziósnek, a báziselemek számát pedig a lineáris tér dimenziójának nevezzük.

A LINEÁRIS TÉR BÁZISA, DIMENZIÓJA

- ▶ A k dimenziós térben k -nál több vektor lineárisan összefüggő.
- ▶ A k dimenziós teret k -nál kevesebb vektor nem generálhatja.
- ▶ Legyen az X lineáris tér egy bázisa $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$. Ekkor tetszőleges $\mathbf{x} \in X$ vektor egyértelműen állítható elő a bázisvektorok lineáris kombinációjaként.
- ▶ Az

$$\mathbf{x} = \xi_1 \mathbf{b}_1 + \xi_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \xi_k \mathbf{b}_k$$

előállításban szereplő $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ számokat az $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

AZ EUKLIDESZI TÉR

- ▶ Jelölje az X (valós) lineáris tér két tetszőleges vektorát x és y .
- ▶ E két vektor (x,y) skaláris szorzatát úgy értelmezzük, hogy az (valós) szám legyen és a következő tulajdonságai legyenek:
 1. $(x,y) = (y,x)$
 2. $(\alpha x,y) = \alpha(x,y)$ ahol az α valós szám.
 3. $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$
 4. $(x,x) > 0$, ha $x \neq 0$ és $(x,x) = 0$, ha $x = 0$
- ▶ Ha $(x,y) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy az x és y vektorok ortogonálisak (merőlegesek egymásra).
- ▶ Az olyan lineáris teret, amelyben skaláris szorzat van értelmezve, euklideszi térnek nevezzük.

Mátrixok

MÁTRIXOK ÉRTELMEZÉSE, SPECIÁLIS MÁTRIXOK

- ▶ Az elemeknek egy téglalap alakú táblázatba, azon belül oszlopokban és sorokban elrendezett rendszerét mátrixnak nevezzük.

- ▶ A mátrix általános alakja:
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- ▶ Az $a_{11}, a_{12}, \dots$ számok esetleg függvények a mátrix elemei.
- ▶ A kettős indexelés az elemek helyét mutatja.

MÁTRIXOK ÉRTELMEZÉSE, SPECIÁLIS MÁTRIXOK

- ▶ Az a_{ik} elem az i -edik sor k -adik eleme
- ▶ A fenti mátrixnak m sora és n oszlopa van, ezért szokás azt mondani, hogy $m \times n$ típusú
- ▶ A mátrix jelölése általában **A**, **B**, **C**
- ▶ Ha a méretét is fel szeretnénk tüntetni, akkor $\mathbf{A}_{(m,n)}$ módon jelöljük, ahol az m a sorok számát, az n az oszlopok számát jelöli.
- ▶ Két mátrix egyenlő, ha mindkettő ugyanolyan típusú (méretű) és a megfelelő helyekenálló elemeik egyenlők, azaz

$$\mathbf{A}_{(m,n)} = \mathbf{B}_{(m,n)}$$

ha $a_{ik} = b_{ik}$ és $(i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n)$

MÁTRIXOK ÉRTELMEZÉSE, SPECIÁLIS MÁTRIXOK

- ▶ Ha az $\mathbf{A}$ mátrix sorait felcseréljük az oszlopaival, a mátrix transzponáltját kapjuk, jelölése $\mathbf{A}^T$
- ▶ Ebből következik, hogy az $m \times n$ típusú mátrix transzponáltja $n \times m$ típusú.
- ▶ Nyilvánvaló, hogy $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
- ▶ Ha egy mátrixnak ugyanannyi sora van, mint amennyi oszlopa, akkor négyzetes (kvadratikus) mátrixnak nevezzük.
- ▶ A n sorból és az n oszlopból álló kvadratikus mátrixra azt mondjuk, hogy n -edrendű.
- ▶ Ha egy mátrix megegyezik a transzponáltjával, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, akkor a $\mathbf{A}$ szimmetrikus.
- ▶ Szimmetrikus mátrix elemei a főátlóra nézve szimmetrikus elrendezésűek, azaz $a_{ik} = a_{ki}$.
- ▶ A főátlót az $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemek alkotják

MÁTRIXOK ÉRTELMEZÉSE, SPECIÁLIS MÁTRIXOK

- ▶ Ha az **A** kvadratikus mátrix esetében

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$$

akkor **A** ferdén szimmetrikus (antiszimmetrikus).

- ▶ Ekkor tehát $a_{ik} = -a_{ki}$ és $a_{ii} = 0$
- ▶ Ha a **D** kvadratikus mátrix főátlóján kívül valamennyi eleme nulla, akkor **D** átlós (diagonális) mátrix.
- ▶ Ha egy diagonális mátrix főátlójában álló valamennyi elem 1, akkor azt egységmátrixnak nevezzük. Jele: **E**
- ▶ A csupa nulla elemből álló mátrixot zérusmátrixnak (nullmátrixnak) nevezzük és **O**-val jelöljük.
- ▶ A mátrixok körében kitüntetett szerepe van az egyetlen oszlopból vagy sorból álló mátrixoknak. Ezeket oszlopmátrixoknak vagy sormátrixoknak nevezzük.
- ▶ A gyakorlatban előforduló mátrixok nagy méretűek is lehetnek. Ilyenkor célszerű blokkokra bontani.

MÁTRIXOK ÉRTELMEZÉSE, SPECIÁLIS MÁTRIXOK

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Ennek transzponáltja egy sorvektor:

$$\mathbf{a}^t = [a_1, \ a_2, \ \dots, \ a_n].$$

Mivel a mátrix sorokból és oszlopokból áll, ezért az $\mathbf{A}_{(m,n)} = [a_{ik}]$ mátrix felírható

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{bmatrix}$$

alakban is, ahol $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ oszlopvektorok, $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^m$ pedig sorvektorok,

MÁTRIXOK ÉRTELMEZÉSE, SPECIÁLIS MÁTRIXOK

Milyen mátrix? $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ -5 & 1 & 0 & 10 \\ 7 & -4 & 10 & 6 \end{bmatrix}$

MÁTRIXOK ÉRTELMEZÉSE, SPECIÁLIS MÁTRIXOK

Milyen mátrix? $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ -5 & 1 & 0 & 10 \\ 7 & -4 & 10 & 6 \end{bmatrix}$ Negyedrendű,
szimmetrikus.

MÁTRIXOK ÉRTELMEZÉSE, SPECIÁLIS MÁTRIXOK

Milyen mátrix? $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 \\ -5 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

MÁTRIXOK ÉRTELMEZÉSE, SPECIÁLIS MÁTRIXOK

Milyen mátrix? $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 \\ -5 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ harmadrendű és ferdén
szimmetrikus

MÁTRIXOK ÉRTELMEZÉSE, SPECIÁLIS MÁTRIXOK

Milyen mátrix? $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

MÁTRIXOK ÉRTELMEZÉSE, SPECIÁLIS MÁTRIXOK

Milyen mátrix? $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ Diagonális mátrix

MÁTRIXOK ÉRTELMEZÉSE, SPECIÁLIS MÁTRIXOK

Milyen mátrix? $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

MÁTRIXOK ÉRTELMEZÉSE, SPECIÁLIS MÁTRIXOK

Milyen mátrix? $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Harmadrendű egységmátrix

MÁTRIXOK ÉRTELMEZÉSE, SPECIÁLIS MÁTRIXOK

Milyen mátrix? $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

MÁTRIXOK ÉRTELMEZÉSE, SPECIÁLIS MÁTRIXOK

Milyen mátrix? $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Másodrendű nullmátrix

MŰVELETEK MÁTRIXOKKAL – ÖSSZEADÁS

- ▶ Két mátrix csak akkor adható össze, ha azonos típusúak.
- ▶ Mátrixok összegét úgy képezzük, hogy az azonos helyen álló (azonos indexű) elemeiket összeadjuk.
- ▶ Legyen $\mathbf{A} = [a_{ik}]$, $\mathbf{B} = [b_{ik}]$ egy $m \times n$ típusú mátrix.
- ▶ Összegük egy olyan $\mathbf{C} = [c_{ik}]$, szintén $m \times n$ típusú mátrix, amelyre $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$ ($i=1,2,\dots,m; k=1,2,\dots,n$)
- ▶ az értelmezés alapján látható, hogy az összeadás kommutatív és asszociatív, azaz

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

MŰVELETEK MÁTRIXOKKAL – ÖSSZEADÁS

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & -4 \\ -5 & 6 & 0 & 10 \\ 7 & -4 & 10 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 9 & -3 & 9 \\ 2 & 6 & 11 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 6 & 9 & -8 & 16 \\ 5 & 8 & 12 & -5 \\ -8 & 7 & 2 & 10 \\ 9 & -7 & 11 & 11 \end{bmatrix}$$

MŰVELETEK MÁTRIXOKKAL – MÁTRIX SZORZÁSA SZÁMMAL

- ▶ Mátrixok egy számmal úgy szorzuk, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk a számmal.
- ▶ Legyen $\mathbf{A} = [a_{ik}]$, ekkor $\lambda \mathbf{A} = [\lambda a_{ik}]$
- ▶ az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrix különbségét $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-1)\mathbf{B}$ módon értelmezzük, ami azt jelenti, hogy a kivonásnál a mátrixok azonos helyen álló elemeit kivonjuk egymásból.
- ▶ Legyenek az $\mathbf{A}$ mátrix elemei valós számok, ekkor érvényes:
- ▶ Bármely $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix előállítható egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$

ahol $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ szimmetrikus, $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ pedig ferdén szimmetrikus.

PÉLDÁK

$$5 \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 10 & 0 & -6 \end{bmatrix} = ?$$

PÉLDÁK

$$5 \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 10 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 15 & 35 & 10 \\ 20 & 50 & 0 & -30 \end{bmatrix}$$

PÉLDÁK

Írjuk fel a következő harmadrendű mátrixot egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként!

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 10 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

PÉLDÁK

Írjuk fel a következő harmadrendű mátrixot egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként!

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 10 & 8 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 10 \\ -5 & 4 & 8 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

PÉLDÁK

Írjuk fel a következő harmadrendű mátrixot egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként!

$$\mathbf{A} + \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 10 & 8 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 10 \\ -5 & 4 & 8 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 12 \\ -5 & 8 & 15 \\ 12 & 15 & 2 \end{bmatrix}$$

PÉLDÁK

Írjuk fel a következő harmadrendű mátrixot egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként!

$$\mathbf{A} - \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 10 & 8 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 10 \\ -5 & 4 & 8 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -8 \\ 5 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

PÉLDÁK

Írjuk fel a következő harmadrendű mátrixot egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként!

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) =$$
$$\begin{bmatrix} 3 & -5/2 & 6 \\ -5/2 & 4 & 15/2 \\ 6 & 15/2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -5/2 & -4 \\ 5/2 & 0 & -1/2 \\ 4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

MŰVELETEK MÁTRIXOKKAL – MÁTRIXOK SZORZÁSA

- ▶ Az **A** mátrixnak **B** mátrixszal való **AB** szorzata csak akkor értelmezhető, ha **A**-nak (a bal oldali tényezőnek) ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora van **B**-nek (a jobb oldali tényezőnek).
- ▶ Ebből következik, hogy az $\mathbf{A}_{(m,p)}$ és $\mathbf{B}_{(p,n)}$ mátrixok szorzata értelmezhető.
- ▶ Az $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ és $\mathbf{B} = [b_{ik}]$ mátrixok ilyen sorrendben vett szorzata az a $\mathbf{C} = [c_{ik}]$ mátrix, amelyre

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{ip}b_{pk}$$

ahol $i=1,2,\dots,m$; $k=1,2,\dots,n$

- ▶ A c_{ik} nem más, mint az **A** mátrix i -edik sorának és a **B** mátrix k -edik oszlopának (mint két vetkornak) a szorzata.
- ▶ a **C** szorzatmátrix $m \times n$ típusú

PÉLDA

$$\cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 1 & -8 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 6 \\ -8 & -8 \end{bmatrix} \cdot$$

MŰVELETEK MÁTRIXOKKAL – MÁTRIXOK SZORZÁSA

- ▶ az értelmezés alapján nyilvánvaló, hogy a szorzás nem kommutatív, azaz

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

- ▶ viszont asszociatív és érvényes a disztributív törvény:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$$

és

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

- ▶ A szorzás asszociativitása folytán értelmezhető a kvadratikus mátrix pozitív egész kitevőjű hatványa:

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{AA} \dots \mathbf{A}$$

- ▶ a zérus kitevőjű mátrix egységmátrixként értelmezzük:

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$$

- ▶ ha $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix illetve az egységmmártix és a nullmátrix vele azonos rendű, akkor

PÉLDA

írjuk fel az $\mathbf{A}\mathbf{u}=\mathbf{b}$ egyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert.
Számítsuk ki a $\mathbf{u}'\mathbf{A}\mathbf{u}$ szorzatot.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3x+z \\ -2x+y+4z \\ 5z \end{bmatrix},$$

PÉLDA

Az $\mathbf{A}\mathbf{u}=\mathbf{b}$ egyenletből következik, hogy

$$\left. \begin{array}{l} 3x+z=2 \\ -2x+y+4z=0 \\ 5z=7 \end{array} \right\}.$$

A feladat második részének megoldása:

$$\mathbf{u}'\mathbf{A}\mathbf{u} = x(3x+z)+y(-2x+y+4z)+z(5z) = 3x^2+y^2+5z^2-2xy+xz+4yz$$

Az $\mathbf{u}'\mathbf{A}\mathbf{u}$ alakú kifejezést kvadratikus alaknak nevezzük.

SORMÁTRIX, OSZLOPMÁTRIX

- ▶ Számítsuk ki egy sormátrixnak és egy oszlopmátrixszal vett szorzatát.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

- ▶ az eredmény egy 1×1 típusú mátrix, ami nem más, mint egy szám.

PÉLDÁK

$$\begin{bmatrix} 5, & -1, & 0, & 9, & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} = 15 - 2 + 0 - 36 + 42 = 19.$$

SORMÁTRIX, OSZLOPMÁTRIX

- Számítsuk ki egy oszlopmátrixnak egy sormátrixszal és vett diadikus szorzatát.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \dots & a_m b_n \end{bmatrix}.$$

- ennek a szorzásnak az eredménye egy ún. diád, ami jelen esetben egy $m \times n$ típusú mátrix

PÉLDÁK

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} [8, 2, -7] = \begin{bmatrix} 24 & 6 & -21 \\ -40 & -10 & 35 \\ 16 & 4 & -14 \end{bmatrix}.$$

MŰVELETEK MÁTRIXOKKAL – NÉGYZETES MÁTRIX INVERZE

- ▶ Az osztás művelete nem végezhető el, úgy értelmezhetjük, mint az $\mathbf{A}$ mátrix inverzével való szorzást
- ▶ A négyzetes mátrix inverzén olyan $\mathbf{A}^{-1}$ -gyel jelölt mátrixot értünk, amely kielégíti az

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$$

és a

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$$

egyenletet.

- ▶ igazolható, hogy az inverzmátrix akkor és csakis akkor létezik, hogyha a mátrix determinánsa nem nulla:

$$\det \mathbf{A} \neq 0$$

- ▶ Ha $\det \mathbf{A} \neq 0$, akkor azt mondjuk, hogy a mátrix reguláris, ellenkező esetben szinguláris

MŰVELETEK MÁTRIXOKKAL – NÉGYZETES MÁTRIX INVERZE

Definíció. Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

négyzetes **mátrix adjungáltja** (jelölése: $\text{adj}\mathbf{A}$) az

$$\text{adj}\mathbf{A} := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrix, ahol A_{ik} az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ik} eleméhez tartozó előjeles aldetermináns.

Az adjungált ismeretében az *inverzmátrix*:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj} \mathbf{A}$$

ami részletesebben felírva:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

MŰVELETEK MÁTRIXOKKAL – NÉGYZETES MÁTRIX INVERZE

- ▶ innen következik, hogy

$$\mathbf{A} \cdot \text{adj}\mathbf{A} = (\det\mathbf{A})\mathbf{E}$$

ahol $\mathbf{E}$ az $\mathbf{A}$ -val azonos rendű egységmátrix.

- ▶ Mielőtt néznénk példákat, nézzük meg végezetül, hogy mi az a determináns

DETERMINÁNSOK

- ▶ Az a, b, c, d elemekből képzett másodrendű determináns az $ad-bc$ különbségét értjük:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

- ▶ Az $ad-bc$ értéket a determináns különbségének is mindjuk.
- ▶ A harmadrendű determináns jelölése és értelmezése:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

DETERMINÁNSOK

- ▶ a kettő síndexelés olyan, hogy a a_{ik} a deremináns i -edik sorának k -adik eleme.
- ▶ Az a_{11} , a_{22} , a_{33} elemek a determináns főátlója
- ▶ látható, hogy a harmadrendű determinánst másodrendű determinánsok segítségével értelmezzük, a jobb oldal számolható, ez lesz a determináns értéke
- ▶ a jobb oldali kifejezés a determináns egyik kifejtése, az ott szereplő másodrendű determinánsok rendre a a_{11} , a_{12} , a_{13} elemkehez tartozó alldeterminánsok
- ▶ az a_{ik} elemhez tartozó alldeterminánst úgy kapjuk meg, hogy töröljük az i -edik sort és a k -adik oszlopot, így keletkezik egy másodrendű alldetermináns
- ▶ a jobb oldali kifejezésről szokás azt mondani, hogy az a harmadrendű determinánsnak az első sora szerinti kifejtése

DETERMINÁNSOK

- ▶ akármelyik sor vagy oszlop szerint is fejtjük ki a determináns, annak értéke mindig ugyanaz lesz, vagyis a determináns bármelyik sora vagy oszlopa szerint kifejtethető
- ▶ a kifejtésénél az az előjelszabály érvényes, hogy az a_{ik} elemhez tartozó D_{ik} aldeterminánst meg kell szorozni $(-1)^{i+k}$ -val (sakktáblaszabály)
- ▶ az előbbi determináns második szlop szerinti kifejtése:

$$D = -a_{12}D_{12} + a_{22}D_{22} - a_{23}D_{23}$$

- ▶ A sakktáblaszabálynak megfelelő előjellel ellátott aldeterminánst előjeles aldeterminánsnak nevezzük.

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

DETERMINÁNSOK TULAJDONSÁGAI

1. A determináns értéke nem változik, ha a mátrixot transzponáljuk, azaz $|A| = |A^T|$.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

2. A determináns értéke c -szeresére változik, ha a mátrix valamelyik sorának, vagy oszlopának minden elemét megszorozzuk c -vel (azaz a determinánsfüggvény homogén).

Példa

$$\begin{vmatrix} 3 \cdot 1 & 2 \\ 3 \cdot 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 9 = -6 = 3 \cdot (-2.)$$

DETERMINÁNSOK TULAJDONSÁGAI

3. Ha egy mátrix valamely sorában, vagy oszlopában csak 0 elem áll, akkor a determináns értéke 0.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 - 0 \cdot 3 = 0.$$

4. Ha egy mátrixban felcserélünk két oszlopot (vagy két sort), akkor a determináns értéke a (-1) -szeresére változik.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 2.$$

5. Ha egy mátrixban két oszlop (vagy sor) megegyezik, akkor a determináns értéke 0. Példa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0.$$

DETERMINÁNSOK TULAJDONSÁGAI

6. Ha egy mátrix valamely oszlopa (vagy sora) egy másik oszlop (vagy sor) skalárszorosa, akkor a determináns értéke 0, hiszen ekkor a skalárt kiemelve olyan mátrixhoz jutunk, melyben két oszlop (vagy sor) megegyezik.

7. Ha egy mátrix valamely oszlopához (vagy sorához) egy másik oszlop (vagy sor) skalárszorosát adjuk, akkor a determináns értéke nem változik.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 + 2 \cdot 1 & 4 + 2 \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 5 \cdot 2 = -2.$$

8. Az egységmátrix determinánása 1.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

PÉLDA

Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

PÉLDA

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -28,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 17,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -17,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -17,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -13,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8.$$

PÉLDA

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-85} \begin{bmatrix} 3 & 7 & -28 \\ 17 & -17 & -17 \\ -13 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$